分数のヒミツ

電卓名人になろう

南山国際では高校３年に選択の数学授業があります．大学・文系学部へ進学しても数学は必要である！ として，確率・統計・数列・微分・積分を中心に数学にこだわる授業を展開します．

学問することの意味は，学んだことをいかに生かすことができるかにかかっています．安物電卓も上手に使いこなせば，思ったよりも複雑な計算ができます．そこで課題が終了した後は，学習内容を利用しながら新しい問題を解決するための手順・『アルゴリズム』を考える授業を展開することにしました．

電卓の使い方については免許皆伝になり，今後コンピューターを利用する場合に備えて『表計算ソフト』（EXCEL）の使い方にも少し触れようという欲張りな計画を立てました．『アルゴリズム』を考えられれば，コンピュータ・プログラミングの能力も身についているはずです．

かつて“数学の実験”で取り組んだことや，サマーセミナーに開講した“分数のヒミツ”の内容をアレンジしたプリントを準備して授業を展開しました．

残念ながら『表計算ソフト』については全く触れることはできませんでしたが，生徒の反応は星城高校での“数学の実験”を思い出させるものでした．生徒たちは電卓のキーに集中して計算に取り組んでいたようです．

これはその授業プリントを再構成したものです．

テーマ１　$\sqrt{2}$ を計算しよう！

$\sqrt{2}$ の計算なんて…　と馬鹿にしないでほしい．そもそも電卓のない時代どんな方法で計算したのでしょう？

【方法１】 ２乗の数を並べました．ここから約２倍になる数の組を見つけだすと …

1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
121	144	169	196	225	256	289	324	361	400
441	484	529	576	625	676	729	784	841	900
961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521	1600
1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401	2500
2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481	3600

（　　　と　　　）　AND　（　　　と　　　）

そのあとどうするか…　考えよう　⇨　$\sqrt{2}=$

[問題]　同様に $\sqrt{3}$ を求めよう！

【方法２】　ニュートンの方法を利用して…

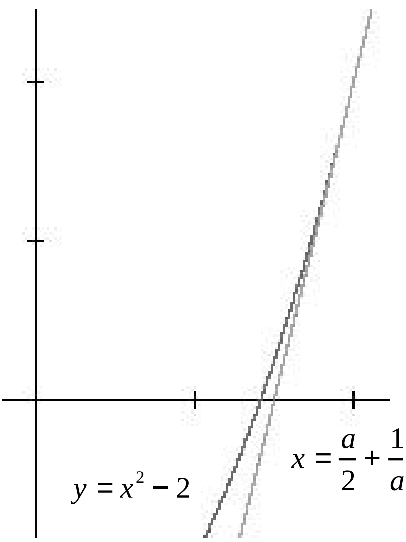
微分を利用したこの方法は“ニュートン法”として利用されています．かの有名なニュートンさんも $\sqrt{2}$ の計算で苦しんだのでしょうか？

曲線 $y=x^2-2$ 上の $x=a$ である点における接線は $y-(a^2-2)=2a(x-a)$ である．

この接線と x 軸との交点の x 座標は

$x=\dfrac{a^2+2}{2a}=\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{a}$ となる．

次に，この x を a に代入，これを繰り返すと…



$$\left[\ a=2 \qquad x=\frac{3}{2}\ \right] \Rightarrow \left[\ a=\frac{3}{2} \qquad x=\frac{17}{12}\ \right]$$

$$\Rightarrow \left[\ a=\frac{17}{12} \qquad x=\frac{577}{408}\ \right] \Rightarrow \left[\ a=\frac{577}{408} \qquad x=\frac{665857}{470832}\ \right]$$

［問題］　**ニュートン法を利用して $\sqrt{3}$ を計算しよう！**

曲線 $y=x^2-3$ **上の** $x=a$ **である点における接線は** $y-(a^2-3)=2a(x-a)$ **，**

この接線と x **軸との交点の** x **座標は，** $x=\dfrac{a^2+3}{2a}=$

よって， $\left[\ a=2 \qquad x=\text{—}\ \right] \Rightarrow \left[\ a=\text{—} \qquad x=\text{———}\ \right]$

$$\Rightarrow \left[\ a=\text{———} \qquad x=\text{———}\ \right]$$

【方法３】　勝野の方法を利用して…

あまり有名でない勝野さんも $\sqrt{2}$ の計算にチャレンジしました．方程式を利用した彼の方法“カツノ法”とはどんなものでしょうか…

$1 < 2 < 4$ **より** $1 < \sqrt{2} < 2$ **，**

ここで， $1+x=\sqrt{2}$ **とおいて，両辺を２乗する**

$(1+x)^2=\sqrt{2}^{\,2}$ ，　$1+2x+x^2=2$ ，　$2x+x^2=1$ ，$x(2+x)=1$ ，　$x=\dfrac{1}{2+x}$

$x=\dfrac{1}{2+x}$ **を分母の** x **に代入して，** $x=\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+x}}$

どんどん代入を繰り返していくと… $x=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}$

（このような繰り返しのことを reentrant な処理といいます）

$\sqrt{2}=1+x$ **であるから，** $\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}$

このような形で表した分数を『連分数』，特に分子が１だけで表されたものを『正則連分数』といいます．無理数とはirrational number という様に，分数で表せない数のことです．でも，この様に連分数で表すことができるのです．

［問題］　カツノ法を利用して$\sqrt{3}$ を連分数で表そう！

$(1+y)^2=\sqrt{3}^2$，　$1+2y+y^2=3$ ，

$2y+y^2=2$ ，　$y(2+y)=2$ ，

$y=\dfrac{2}{2+y}$ …

$$\sqrt{3}=\quad+\cfrac{}{\quad+\cfrac{}{\quad+\cfrac{}{\quad+\cfrac{}{+\cdots}}}}$$

いよいよ，電卓が登場です．

〈電卓計算１〉　ニュートン法でできた式から$\sqrt{2}$ を電卓で計算しよう！

$x=\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{a}$ の a に２を代入し x を求め，計算結果をメモリーに残します，

電卓では次のようにキーを押します．

$\boxed{\text{AC}}\ \boxed{2}\ \boxed{\text{M+}}$　　$\boxed{\text{MR}}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{M-}}\ \boxed{\div}\ \boxed{\div}\ \boxed{1}\ \boxed{=}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{M+}}$

これで，メモリーの中は$x=\dfrac{2}{2}+\dfrac{1}{2}$ になったはず！

次に，〔*計算結果の* x *を* a *に代入し，* a *から* x *を求める*〕を繰り返すと，x の値はだんだん$\sqrt{2}$ に近くなっていきます．

電卓では，$\boxed{\text{MR}}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{M-}}\ \boxed{\div}\ \boxed{\div}\ \boxed{1}\ \boxed{=}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{M+}}$

を繰り返します．そのうち，$\boxed{\text{MR}}$ したときの表示が変化しなくなる．

それが$\sqrt{2}$ の値です！

$\sqrt{2}=$ （　　　　　　　　　　　）

（計算結果が変化しなくなることを，今後 “ 電卓がフリーズする ” といいます）

［練習］　ニュートン法により，$\sqrt{5}$ （$x=\dfrac{a^2+5}{2a}=\dfrac{a}{2}+\dfrac{5}{2a}$）を計算しよう！

$\boxed{\text{AC}}\ \boxed{}\ \boxed{\text{M+}}$　　$\boxed{\text{MR}}\ \boxed{\div}\ \boxed{2}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{M-}}\ \boxed{\div}\ \boxed{\div}\ \boxed{}\ \boxed{=}\ \boxed{\div}\ \boxed{}\ \boxed{=}\ \boxed{\text{M+}}$

空欄に適当な数を入れて，下線部を繰り返します．

$\sqrt{5}=$ （　　　　　　　　　　　）

〈電卓計算２〉　カツノ法でできた式から$\sqrt{2}$ を電卓で計算しよう！

$\boxed{\text{AC}}$ を押したあと，$\boxed{+}\ \boxed{2}\ \boxed{\div}\ \boxed{\div}\ \boxed{1}\ \boxed{=}$

を繰り返すと，どうなるでしょう？

右の式を参考に，上の方法についてその意味を考えよう．

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cdots}}}}$$

さて，電卓がフリーズします．そしたら$\boxed{+}\ \boxed{1}$ でできあがり．

$\sqrt{2}=$ **(　　　　　　　　　　　　)**

[練習１]　**カツノ法で$\sqrt{5}$を表す式を作り，その式により$\sqrt{5}$を計算しよう！**

$2+x=\sqrt{5}$，$(2+x)^2=\sqrt{5}^2$ **より，…**

$$\sqrt{5}=\quad+\cfrac{}{\quad+\cfrac{}{\quad+\cfrac{}{\quad+\cfrac{}{\quad+\cdots}}}}$$

電卓では，$\boxed{\text{AC}}$ のあと$\boxed{+}\ \boxed{}\ \boxed{\div}\ \boxed{\div}\ \boxed{}\ \boxed{=}$ を繰り返し，

フリーズしたら，$\boxed{+}\ \boxed{}$ でできあがり！

$\sqrt{5}=$ **(　　　　　　　　　　　　)**

[練習２]　**カツノ法で$\sqrt{7}$を表す式を作り，その式により$\sqrt{7}$を計算しよう！**

$2+x=\sqrt{7}$，$(2+x)^2=\sqrt{7}^2$ **より，…**

$$\sqrt{7}=\quad+\cfrac{}{\quad+\cfrac{}{\quad+\cfrac{}{\quad+\cfrac{}{\quad+\cdots}}}}$$

電卓では，$\boxed{\text{AC}}$ のあと$\boxed{+}\ \boxed{}\ \boxed{\div}\ \boxed{\div}\ \boxed{}\ \boxed{=}$ を繰り返し，

フリーズしたら，$\boxed{+}\ \boxed{}$　でできあがり！

$\sqrt{7}=$ **(　　　　　　　　　　　　)**

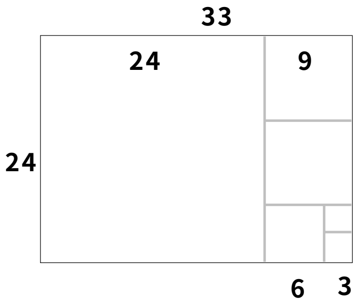
『正則連分数』に話題を移します．$\sqrt{2}$ や$\sqrt{5}$ のように分子が１だけになるものは『正則』でした．$\sqrt{7}$ はカツノ法では『正則』になりません．けれど，ユークリッドが考えた論理を用いると必ず『正則連分数』で表すことができます．

【ユークリッドの互除法】　難しいようで簡単な論理です，ゆーくりっと考えて…

例：33と24の最大公約数（Greatest Common Measure)を求めよう．

33÷24=1 … 9　　　24÷9=2 … 6

9÷6=1 … 3　　　6÷3=2 … 0



この割り算の意味は右図の通りで，

分数$\frac{33}{24}$は次の様に考えることができます．

$$\frac{33}{24}=1+\frac{9}{24}=1+\frac{1}{\frac{24}{9}}=1+\frac{1}{2+\frac{6}{9}}$$

$$=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{9}{6}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{3}{6}}}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2}}}$$

ちょと難しい話が続きますが，$\sqrt{3}$ をユークリッドの互除法を用いて，正則連分数で表してみましょう．

$$\sqrt{3}=1+\left(\sqrt{3}-1\right)\ ,\qquad X=\sqrt{3}-1=\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{3}-1}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}=\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}}\ ,$$

$$Y=\frac{\sqrt{3}-1}{2}=\frac{1}{\frac{2}{\sqrt{3}-1}}=\frac{1}{\sqrt{3}+1}=\frac{1}{2+\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

つまり，$\sqrt{3}=1+X,\quad X=\frac{1}{1+Y},\quad Y=\frac{1}{2+X}$ **より，**

$X=\dfrac{1}{1+\frac{1}{2+X}}$ **となり，**$\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}$ **と表せます．**

[考察]　　カツノ法で作った$\sqrt{3}$ を表す式を正則連分数と比較しよう．

【カツノ法 その２】　電卓で$\sqrt{3}$ を『正則連分数』になおそう！

（　　）には計算の結果を記入しよう．

$\boxed{3}\boxed{\sqrt{\ }}$ （　　　　　　　）　$\boxed{-}\boxed{1}\boxed{=}\boxed{\div}\boxed{\div}\boxed{1}\boxed{=}$ （　　　　　　　）

$\boxed{-}\boxed{1}\boxed{=}\boxed{\div}\boxed{\div}\boxed{1}\boxed{=}$ （　　　　　　　）

$\boxed{-}\boxed{2}\boxed{=}\boxed{\div}\boxed{\div}\boxed{1}\boxed{=}$ （　　　　　　　）

$\boxed{-}\boxed{1}\boxed{=}\boxed{\div}\boxed{\div}\boxed{1}\boxed{=}$ （　　　　　　　）

$\boxed{-}\boxed{2}\boxed{=}\boxed{\div}\boxed{\div}\boxed{1}\boxed{=}$ （　　　　　　　）

ここで，$\boxed{-}\boxed{}$ の数が繰り返され，それが『正則連分数』の分母になります．

〈電卓計算１〉　カツノ法その２で，$\sqrt{7}$ を表す式を作ろう．

$\boxed{7}\boxed{\sqrt{\ }}$ （　　　　　　　）　$\boxed{-}\boxed{2}\boxed{=}\boxed{\div}\boxed{\div}\boxed{1}\boxed{=}$ （　　　　　　　）

$\boxed{-}\boxed{}\boxed{=}\boxed{\div}\boxed{\div}\boxed{1}\boxed{=}$ （　　　　　　　）

$\boxed{-}\boxed{}\boxed{=}\boxed{\div}\boxed{\div}\boxed{1}\boxed{=}$ （　　　　　　　）

$\boxed{-}\boxed{}\boxed{=}\boxed{\div}\boxed{\div}\boxed{1}\boxed{=}$ （　　　　　　　）

$\boxed{-}\boxed{}\boxed{=}\boxed{\div}\boxed{\div}\boxed{1}\boxed{=}$ （　　　　　　　）

$\boxed{-}\boxed{}\boxed{=}\boxed{\div}\boxed{\div}\boxed{1}\boxed{=}$ （　　　　　　　）

$\boxed{-}\boxed{}\boxed{=}\boxed{\div}\boxed{\div}\boxed{1}\boxed{=}$ （　　　　　　　）

$\boxed{-}\boxed{}\boxed{=}\boxed{\div}\boxed{\div}\boxed{1}\boxed{=}$ （　　　　　　　）

$\boxed{-}\boxed{}\boxed{=}\boxed{\div}\boxed{\div}\boxed{1}\boxed{=}$ （　　　　　　　）

$$\sqrt{7}=2+\cfrac{1}{\quad+\cfrac{1}{\quad+\cfrac{1}{\quad+\cfrac{1}{\quad+\cfrac{1}{\quad+\cfrac{1}{\quad+\cfrac{1}{\quad+\cfrac{1}{\quad+\cdots}}}}}}}}$$

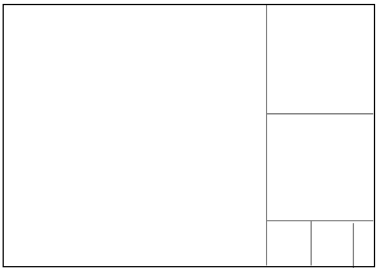
【正則連分数の表し方】

分数のままではゴチャゴチャします．そこで次のように，正則連分数を表します．

$$\sqrt{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}=[1,1,2,1,2,1,\cdots]=[1,\dot{1},\dot{2}]$$

$\sqrt{7}$の場合，電卓で計算すると，$\sqrt{7}=[2,\dot{1},1,1,\dot{4}]$

【正則連分数とユークリッドの互除法】



ユークリッドの互除法は，“長方形から最大の正方形を取り除き長方形を作る”という作業を繰り返しています．

$\sqrt{2}=[1,\dot{2}]$という式は，$\sqrt{2}$：１の長方形からは正方形が１個，２個，２個，… と取れるわけです．

私たちが普段使うプリント用紙は$\sqrt{2}$：１の長方形です．本当かどうかは，最大の正方形を次々と取り除けば確かめられます．

【プリント用紙で折る連鶴】

正方形といえば折り紙，折り紙といえば折り鶴，プリント用紙を正方形に切り分ける時，切り離さないで端を少しだけ繋がるようにします．そして，大･中･中･小･小と５羽分の折り鶴を繋げたまま折ります．

正方形に切り離して（大･中），（中･小）で２組の親子カンガルーを折るのも面白いことです．